数理解析研究所講究録
第1870巻 2013年 25-29

Affine Springer fibers of type A and combinatorics of diagonal coinvariants

京都大学大学院理学研究科数学教室　疋田辰之
Department of Mathematics, Kyoto University

1 Combinatorics of diagonal coinvariants

$\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}]=\mathbb{C}[x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n]$ を $2n$ 変数多項式環とし, n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ への作用を x 変数と y 変数を同時に入れ替えることにより定める. $\langle\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}]_+^{\mathfrak{S}_n}\rangle$ を $\mathfrak{S}_n$ 不変な多項式であって定数項が0のもの全体で生成される $\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ のイデアルとする. このとき, diagonal coinvariant のなす環 DR_n を

$$DR_n:=\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}]/\langle\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}]_+^{\mathfrak{S}_n}\rangle$$

により定義する. DR_n は x 次数と y 次数からなる二つの次数付け $DR_n=\oplus_{i,j\in\mathbb{N}}(DR_n)_{i,j}$ を持ち, 各斉次成分 $(DR_n)_{i,j}$ には $\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ への $\mathfrak{S}_n$ 作用から誘導される自然な $\mathfrak{S}_n$ 作用が入る.

e_k を k 次基本対称式, $\Lambda=\mathbb{Z}[e_1,e_2,\ldots]$ を対称多項式のなす環, $\lambda\vdash n$ に対し s_λ を Schur 多項式, $\langle-,-\rangle:\Lambda\otimes\Lambda\to\mathbb{Z}$ を Hall inner product, $\mathcal{F}:\mathrm{Rep}(\mathfrak{S}_n)\to\Lambda$ を Frobenius characteristic とする. DR_n の bigraded Frobenius series $\mathcal{F}(DR_n;q,t):=\sum_{i,j}t^iq^j\mathcal{F}((DR_n)_{i,j})$ は Macdonald 多項式や Catalan 数などの組み合わせ論的対象と関係し, 研究されてきた. 例えば $C_n(q,t):=\langle\mathcal{F}(DR_n;q,t),s_{(1^n)}\rangle$ は q,t-Catalan 数と呼ばれ, $C_n(1,1)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ を満たすことが知られている. また, Haiman は $\mathbb{C}^2$ の点の Hilbert スキームの幾何を用いることにより次の公式を証明している.

Theorem 1 ([Hai]). $\mu\vdash n$ に対し, μ' を転置, $n(\mu)=\sum_i(i-1)\mu_i$, $\tilde{H}_\mu$ を modified Macdonald 多項式, $\nabla:\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}(q,t)\to\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}(q,t)$ を $\nabla\tilde{H}_\mu=t^{n(\mu)}q^{n(\mu')}\tilde{H}_\mu$ により定まる線形作用素とする. このとき,

$$\mathcal{F}(DR_n;q,t)=\nabla e_n.$$

特にこの公式から $\dim DR_n=(n+1)^{n-1}$ であることが導かれる. $(n+1)^{n-1}$ という数は例えば parking function と呼ばれる組み合わせ論的対象の個数と一致することが知られている. ここで parking function とは写像 $f:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$ であって $\#f^{-1}(\{1,\ldots,k\})\geq k$ が任意の $1\leq k\leq n$ に対して成り立つもののことである. したがって DR_n の bigraded Hilbert series は parking function に適当な次数付けを与えたものの和として書けるはずである. あるいはより強く, $\mathcal{F}(DR_n;q,t)$ を parking function のような組み合わせ論的対象の寄与の和として書けるかという問題が考えられる. この問題に関して Haglund, Haiman, Loehr, Remmel, Ulyanov は $\mathcal{F}(DR_n;q,t)$ の単項多項式展開を組み合わせ論的に記述する公式を予想した (shuffle conjecture [HHLRU]). 実際にはより一般に $\nabla^m e_n$ の組み合わせ論的公式が予想されている. 一般の $\lambda\vdash n$ に対する $\langle\mathcal{F}(DR_n;q,t),s_\lambda\rangle$ の組み合わせ論的な記述は知られていないと思われる.

Shuffle conjecure を定式化するために記号を準備する. 分割 $\lambda\vdash n$ とその Young diagram $\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid 0\leq j<\lambda_{i+1}\}$ を同一視する. $\delta_n=(n-1,n-2,\ldots,1,0)$ を階段型の分割とする. $x=(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ に

対し, $d(x)=i+j$ とおく. λ を $\lambda\subset\delta_n$ を満たす分割, $T\in\mathrm{SSYT}(\lambda+(1^n)/\lambda)$ を skew Young diagram $\lambda+(1^n)/\lambda$ 上の semistandard Young tableau とする. $T(x)<T(y)$ を満たす $\lambda+(1^n)/\lambda$ の元の組 $(x,y)\in(\lambda+(1^n)/\lambda)^2$, $x=(i,j)$, $y=(i',j')$ が T について d-inversion であるとは, $d(y)=d(x)$ かつ $j>j'$, あるいは $d(y)=d(x)+1$ かつ $j<j'$ を満たすことをいい, その個数を $\mathrm{dinv}(T)$ と書く.

$$D_n(z;q,t)=\sum_{\lambda\subset\delta_n}t^{|\delta_n/\lambda|}\sum_{T\in\mathrm{SSYT}(\lambda+(1^n)/\lambda)}q^{\mathrm{dinv}(T)}z^T$$

とおく. ここで $|\mu|$ は skew Young diagram μ の箱の個数, $z^T=\prod_{x\in\lambda}z_{T(x)}$ である. これが対称多項式でかつ Schur positive であることは非自明であるが, [HHLRU] において LLT 多項式と呼ばれる対称多項式と比較することによって証明されている.

Conjecture 2 (Shuffle conjecture [HHLRU]).

$$\nabla e_n=D_n(z;q,t).$$

ここでは shuffle conjecture を A 型 rational Cherednik algebra の有限次元既約表現に一般化する. $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{sl}_n$ を Cartan subalgebra, $S\subset\mathfrak{S}_n$ を reflection のなす部分集合, $\alpha_s\in\mathfrak{h}^*$, $\check{\alpha}_s\in\mathfrak{h}$ を $s\in S$ に対応するルート, コルートとする. $c\in\mathbb{C}$ に対し A 型 rational Cherednik algebra $H_{n,c}$ を $\mathbb{C}$ 上 $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}^*$, $\mathfrak{S}_n$ で生成され,

$$w\cdot x\cdot w^{-1}=w(x),\ w\cdot y\cdot w^{-1}=w(y),\ \forall y\in\mathfrak{h},\ x\in\mathfrak{h}^*,\ w\in\mathfrak{S}_n$$

$$x_1\cdot x_2=x_2\cdot x_1,\ y_1\cdot y_2=y_2\cdot y_1,\ \forall y_1,y_2\in\mathfrak{h},\ x_1,x_2\in\mathfrak{h}^*$$

$$y\cdot x-x\cdot y=\langle y,x\rangle-\sum_{s\in S}c\cdot\langle y,\alpha_s\rangle\langle\check{\alpha}_s,x\rangle\cdot s,\ \forall y\in\mathfrak{h},\ x\in\mathfrak{h}^*$$

を関係式とする代数と定義する.

$H_{n,c}$ は n と互いに素な自然数 r が存在して $c=\pm\frac{r}{n}$ となるときただ一つ有限次元既約表現 L_c を持ち, そうでないときは有限次元表現を持たないことが知られている ([BEG]). また, $L_{\frac{n+1}{n}}$ は自然に一つ次数付けを持ち, filtration であって $\mathrm{gr}_*L_{\frac{n+1}{n}}\otimes\mathrm{sgn}\cong DR_n$ となるものが存在することが知られている ([G]). 一般の L_c に対してもいくつか自然な filtration が構成され, Gorsky, Oblomkov, Rasmussen, Shende はこれらの filtration が一致すると予想している ([GORS]). そしてその filtration に関する gr_*L_c の bigraded Frobenius series が shuffle conjecture と同様の組み合わせ論的記述を持つことが期待される (正確には二つの次数を適当に組み合わせて調節する必要がある). また, [GORS] では $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\bigwedge^*\mathfrak{h},\mathrm{gr}_*L_{\frac{r}{n}})$ が (n,r)-torus knot の Khovanov-Rozansky homology を記述すると予想されており, shuffle conjecture を認めればこれを組み合わせ論的に書くこともできる.

2 Affine Springer fibers

Affine Springer fiber は [KL] で定義され, 軌道積分との関わりから Fundamental Lemma の証明などに用いられている. そして L_c は A 型 affine Springer fiber のコホモロジーとして実現されることが知られている ([V, VV]). このことを手掛かりにして shuffle conjecture を一般化する.

ここでは簡単のため A 型の場合に話を限定する. まず記号を準備する. $F=\mathbb{C}((\epsilon))$ をローラン級数のなす体, $\mathcal{O}=\mathbb{C}[[\epsilon]]$ を形式的べき級数環, $G=\mathrm{SL}_n$ とし, Borel 部分群 $B\subset G$ を一つ固定する. $\mathrm{ev}:G(\mathcal{O})\to G(\mathbb{C})$ を ϵ を 0 に送る写像, $I=\mathrm{ev}^{-1}(B(\mathbb{C}))\subset G(F)$ を岩堀部分群, $X=G(F)/G(\mathcal{O})$ を affine

Grassmannian, $\hat{\mathcal{B}} = G(F)/I$ を affine flag variety とする. $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ をルート空間分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$ し, 0 でない元 $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ を固定する. $\check{\rho} = \frac{1}{2}\sum_{\check{\alpha} \in R^+} \check{\alpha}$ とする. $W_{\mathrm{aff}} = \langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle$ を affine Weyl 群, $W = \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle \cong \mathfrak{S}_n$ を Weyl 群とする. s_i の添え字を $s_{i+n} := s_i$ により $i \in \mathbb{Z}$ に拡張しておく. n と互いに素な自然数 r を一つ固定し, $r = mn + b$, $1 \leq b \leq n-1$, と書く. $\mathfrak{g}(F)$ の regular semisimple nil elliptic 元 v を次のように定める.

$$v := \epsilon^m \left(\epsilon \sum_{\alpha \in R, \langle \check{\rho}, \alpha \rangle = b-n} e_\alpha + \sum_{\alpha \in R, \langle \check{\rho}, \alpha \rangle = b} e_\alpha \right).$$

v に付随する affine Springer fiber を次のように定義する.

$$X_v := \{ g \cdot G(\mathcal{O}) \mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}(v) \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}) \} \subset X,$$

$$\hat{\mathcal{B}}_v := \{ g \cdot I \mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}(v) \in \mathrm{Lie}(I) \} \subset \hat{\mathcal{B}}.$$

v が regular semisimple であることから X_v, $\hat{\mathcal{B}}_v$ は有限次元であり, v が elliptic であることから X_v, $\hat{\mathcal{B}}_v$ の既約成分の個数は有限個である ([KL]). X_v, $\hat{\mathcal{B}}_v$ の次元はともに $\frac{(n-1)(r-1)}{2}$ となる. $\pi : \hat{\mathcal{B}}_v \to X_v$ を自然な射影とすると, π のファイバーは Springer fiber になる. したがって通常の Springer theory の場合と同様に $H_*^{\mathrm{BM}}(\hat{\mathcal{B}}_v, \mathbb{C})$ には W が作用する ([L]).

次の分解

$$X = \bigsqcup_{w \in W_{\mathrm{aff}}/W} I \cdot w \cdot G(\mathcal{O})/G(\mathcal{O})$$

を思い出す. $C_w = I \cdot w \cdot G(\mathcal{O})/G(\mathcal{O}) \cap X_v$ とおくと, $X_v = \bigsqcup_{w \in W_{\mathrm{aff}}/W} C_w$ である.

Theorem 3 ([GKM]). C_w は空でなければアファイン空間と同型であり, その次元は

$$\#\left\{ (\alpha, k) \in R \times \mathbb{Z} \mid 0 < \langle \check{\rho}, \alpha \rangle + kn < r,\ k < \langle \check{\lambda}, \alpha \rangle \right\}$$

で与えられる. ここで $\check{\lambda}$ はコルート格子の元であって $w \in \epsilon^{\check{\lambda}} \cdot W$ を満たす唯一のものである. 特に X_v はアファイン空間による paving を持つ.

Remark 4. 同様に $\hat{\mathcal{B}}_v$ や他の parahoric subgroup に対応する affine Springer fiber の場合の affine paving も構成できる. このことは主定理の証明に使われる.

したがって $\hat{\mathcal{B}}_v$ の奇数次の Borel-Moore ホモロジーは消える. $H_*^{\mathrm{BM}}(\hat{\mathcal{B}}_v, \mathbb{C})$ には $H_{2i}^{\mathrm{BM}}(\hat{\mathcal{B}}_v, \mathbb{C})$ を次数 i の成分とすることにより一つ次数付けが入る.

次に filtration を構成する. $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$X_{i,v} = \bigsqcup_{\substack{w \in W_{\mathrm{aff}}/W \\ s_i s_{i-1} \cdots s_1 s_0 \not\leq w}} I \cdot w \cdot G(\mathcal{O})/G(\mathcal{O}) \cap X_v$$

とおく. これは X_v の閉部分集合である. 奇数次の Borel-Moore ホモロジーが消えることから $F_i := H_*^{\mathrm{BM}}(\pi^{-1}(X_{i,v}), \mathbb{C}) \hookrightarrow H_*^{\mathrm{BM}}(\hat{\mathcal{B}}_v, \mathbb{C})$ となり, $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{\frac{(n-1)(r-1)}{2}} = H_*^{\mathrm{BM}}(\hat{\mathcal{B}}_v, \mathbb{C})$ という filtration が得られる. そして $D_{(n,r)}(z; q, t) \in \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q, t]$ を

$$q^{\frac{(n-1)(r-1)}{2}} D_{(n,r)}(z; q^{-1}, t) = \sum_{i,j} t^i q^j \mathcal{F}(\mathrm{gr}_i H_{2j}^{\mathrm{BM}}(\hat{\mathcal{B}}_v, \mathbb{C}) \otimes \mathrm{sgn})$$

を満たす対称多項式として定義する．こうして人工的に構成した grading に関する Frobenius series は組み合わせ論的に記述することができる一方で，表現論的な意味は明らかではない．実際 [GORS] の filtration とは一致しないことがわかっている．しかしながらこれが数値的には正しい公式であることを shuffle conjecture は主張する．

Conjecture 5 (shuffle conjecture の一般化)**.**

$$\mathcal{F}(\mathrm{gr}_* L_{\frac{r}{n}} \otimes \mathrm{sgn}; q, t) = D_{(n,r)}(z; q, t).$$

次節でこの予想に対する状況証拠をいくつか述べる．

3 Main Theorem

$D_{(n,r)}$ を組み合わせ論的に記述するために記号を少し準備する．$x = (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ に対し，$r(x) = rn - r(i+1) - n(j+1)$ とおく．δ を x 軸，y 軸，点 $(0,r)$ と点 $(n,0)$ を結ぶ直線に囲まれた箱全体からなる Young diagram とする．SL_n のコルート格子 Q を $\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_i x_i = 0\}$ とみなす．0 でない Q の元 $\check{\lambda}$ に対し $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$ の元 $(a_1,\ldots,a_{n-1})$ を

$$\check{\lambda} = (a_{n-k+1} + l, a_{n-k+2} + l, \cdots, a_{n-1} + l, l, a_1 + l + 1, a_2 + l + 1, \cdots, a_{n-k} + l + 1)$$

により定める．ここで l は x の成分の最小値であり，k は $x_i = l$ となる x_i のうちで一番右にあるものの添え字である．a_i の添え字を $a_n = 0$, $a_{i+n} = a_i + 1$ とおくことにより $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に拡張しておく．そしてこの a_i に対して n 個の整数の組 $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ を $\lambda_i = r - mi - 1 - a_{ib}$ により定める．

Lemma 6. $w = \epsilon^{\check{\lambda}} \cdot W \in W_{\mathrm{aff}}/W$ に対し，$C_w \neq \emptyset$ となることと λ が $\lambda \subset \delta$ をみたす分割になることは同値．

これにより $C_w \neq \emptyset$ となる $w \in W_{\mathrm{aff}}/W$ と $\lambda \subset \delta$ となる分割 λ との間には 1 対 1 対応があることがわかる．$w \in W_{\mathrm{aff}}/W$ と $\lambda \subset \delta$ が対応するとき，$d(\lambda) = \dim(C_w)$ とおく．

$\lambda \subset \delta$, $T \in \mathrm{SSYT}(\lambda + (1^n)/\lambda)$ に対し，$T(x) \geq T(y)$ かつ $0 < r(x) - r(y) < r$ を満たす $\lambda + (1^n)/\lambda$ の元の組 (x,y) の個数を $\mathrm{dinv}''(T)$ とおく．記号は [Hi] に合わせている．

Theorem 7 ([Hi])**.**

$$q^{\frac{(n-1)(r-1)}{2}} D_{(n,r)}(z; q^{-1}, t) = \sum_{\lambda \subset \delta} t^{|\delta/\lambda|} \sum_{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda + (1^n)/\lambda)} q^{d(\lambda) + \mathrm{dinv}''(T)} z^T$$

であり，さらに $D_{(n,n+1)}(z; q, t) = D_n(z; q, t)$ が成り立つ．

Remark 8. $\nabla^m e_n$ に対する D_n の類似 ([HHLRU]) は $D_{(n,mn+1)}$ と一致する．

したがって Conjecture 5 は shuffle conjecture の一般化になっていることがわかる．また，$D_{(n,r)}$ が $\mathfrak{S}_n$ 表現の Frobenius series として構成されていることから，この定理の系として次の命題の別証明が得られる．

Corollary 9 ([HHLRU])**.** $D_n(z; q, t)$ は z について対称かつ Schur positive.

$\mathcal{F}(DR_n; q, t)$ は明らかに q と t の入れ替えに関して対称である．したがって一般にも次の純粋に組み合わせ論的な性質 (1) が成り立つことが期待される．

Conjecture 10. (1) $D_{(n,r)}(z;q,t) = D_{(n,r)}(z;t,q)$.
(2) $D_{(n,r+n)}(z;q,t) = \nabla D_{(n,r)}(z;q,t)$.

これらは小さい (n,r) については成り立つことが観察できる. (2) は $\nabla^m e_n$ に対する shuffle conjecture を含む. また, $\mathrm{gr}_* L_{\frac{r}{n}}$ と (n,r)-torus knot の Khovanov-Rozansky homology との関係を認めるならば n と r を入れ替える対称性があることが期待される. 実際, 次を示すことができる.

Theorem 11. $1 \leq k \leq \min(n,r)$ に対し,

$$\langle D_{(n,r)}(z;q,t), s_{(k1^{n-k})}\rangle = \langle D_{(r,n)}(z;q,t), s_{(k1^{r-k})}\rangle$$

が成り立つ.

証明は superization ([HHLRU, Hag]) を用いて両辺を組み合わせ論的に記述することによってなされる. 対応は Young diagram の転置により与えられる. t 次数が一致することは自明であり, q 次数が一致することも確認できる.

参考文献

[BEG] Y. Berest, P. Etingof, V. Ginzburg, Finite-dimensional representations of rational Cherednik algebras, Int. Math. Res. Not., 19:1053-1088, 2003

[G] I. Gordon, On the quotient ring by diagonal invariants, Invent. Math., 153(3):503-518, 2003.

[GKM] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson, Purity of equivalued affine Springer fibers, Represent. Theory, 10:130-146, 2006.

[GORS] E. Gorsky, A. Oblomkov, J. Rasmussen, V. Shende, Torus knots and the rational DAHA, 2012. arXiv:1207.4523

[Hag] J. Haglund, The q,t-Catalan numbers and the space of diagonal harmonics, American Mathematical Society, 2008.

[HHLRU] J. Haglund, M. Haiman, N. Loehr, J. B. Remmel, A. Ulyanov, A combinatorial formula for the character of the diagonal coinvariants, Duke Math. J., 126(2):195-232, 2005.

[Hai] M. Haiman, Vanishing theorems and character formulas for the Hilbert scheme of points in the plane, Invent. Math., 149(2):371-407, 2002.

[Hi] T. Hikita, Affine Springer fibers of type A and combinatorics of diagonal coinvariants, 2012. arXiv:1203.5878.

[KL] D. Kazhdan, G. Lusztig, Fixed point varieties on affine flag manifolds, Israel J. Math., 62(2):129-168, 1988.

[L] G. Lusztig, Affine Weyl groups and conjugacy classes in Weyl groups, Transform. Groups, 1(1-2):83-97, 1996.

[VV] M. Varagnolo, E. Vasserot, Finite-dimensional representations of DAHA and affine Springer fibers: the spherical case, Duke Math. J., 147(3):439-540, 2009.

[V] E. Vasserot, Induced and simple modules of double affine Hecke algebras, Duke Math. J., 126(2):251-323, 2005.